5.3 Описание многошаговых методов

Определение. Линейным m-шаговым методом называется метод с расчетной схемой следующего вида:

$$\frac{a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \ldots + a_m y_{n-m}}{\tau} = b_0 f_n + b_1 f_{n-1} + \ldots + b_m f_{n-m}. \tag{5.6}$$

где a_i, b_j — параметры метода, а y_{n-k} и f_{n-i} означают следующее:

$$\begin{cases} y_{n-k} = y(t_{n-k}); \\ f_{n-i} = f(t_{n-i},\, y_{n-i}). \end{cases}$$

Таким образом, для реализации m-шагового метода на первом шаге требуется знать значения $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$. Значение y_0 можно взять равным u_0 — начальному условию, а вот для вычисления $y_1, \ldots, y_{m-1}$ применяют методы Рунге-Кутта соответствующего порядка точности.

Заметим также, что в методе используются только табличные данные о $f(x)$ — то есть уметь вычислять функцию f на промежуточных точках в общем случае не требуется, а может понадобиться только для получения $y_1, \ldots, y_{m-1}$.

Если в схеме (5.6) коэффициент b_0 равен нулю, то в правой части f_n не присутствует, и соответствующий метод называется **явным** (по тем же причинам, что и раньше). Если же $b_0 \neq 0$, то метод называется **неявным** (как ни странно, тоже по тем же причинам, что и раньше); возникает нелинейное уравнение относительно y_n, которое в общем случае решается методом Ньютона.

Очевидно, что метод не изменится, если выражение (5.6) домножить на какую-нибудь ненулевую константу. Поэтому устраним неоднозначность, введя условие нормировки: $\sum\limits_{i=0}^{m} b_i = 1$. Покажем, что в этом случае правая часть уравнения (5.6) будет аппроксимировать правую часть дифференциального уравнения исходной задачи:

$$f(t_n, u_n) - \sum_{i=0}^{m} b_i f(t_n - i\tau,\, u(t_n - i\tau)) = \{\text{разлагая слагаемые в сумме в ряд Тейлора}\} =$$

$$= f(t_n, u_n) - \sum_{i=0}^{m} b_i [f(t_n, u_n) + O(\tau)]gg = f_n(1 - \sum_{i=0}^{m} b_i) + O(\tau) = O(\tau)$$

— это и означает аппроксимацию.

Теперь выведем достаточные условия для достижения k-го порядка аппроксимации исходной функции. Для этого рассмотрим выражение для невязки:

$$\psi_n = -\frac{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i u(t_n - i\tau)}{\tau} + \sum_{i=0}^{m} b_i f(t_n - i\tau,\, u(t_n - i\tau)) = -\frac{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i u_{n-i}}{\tau} + \sum_{i=0}^{m} b_i f(t_{n-i},\, u_{n-i}).$$

Теперь разложим составляющие равенства в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} u(t_n - i\tau) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{u_n^{(j)}}{j!}(-i\tau)^j + O(\tau^{k+1}); \\ f(t_{n-i},\, u_{n-i}) &= \{\mathsf{u' = f(t,u)}\} = u'_{n-i} = u'(t_n - i\tau) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{u_n^{(j+1)}}{j!}(-i\tau)^j + O(\tau^k). \end{aligned}$$

Подставив эти формулы в выражение для невязки, получим:

$$\psi_n = -\frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^{m} a_i \left[\sum_{j=0}^{k} \frac{u_n^{(j)}}{j!}(-i\tau)^j \right] + \sum_{i=0}^{m} b_i \sum_{j=0}^{k-1} \frac{u_n^{(j+1)}}{j!}(-i\tau)^j + O(\tau^k).$$

Поменяем порядки суммирования в двойных суммах, при этом из первой суммы вынесем отдельно составляющую при $j = 0$, а во второй сделаем замену $j = j + 1$. Тогда выражение для невязки перепишется так:

$$\begin{aligned}
\psi_n &= -\frac{1}{\tau}\sum_{i=0}^{m} u_n a_i - \frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{k}\frac{u_n^{(j)}}{j!}\sum_{i=0}^{m} a_i(-i\tau)^j + \sum_{j=1}^{k}\frac{u_n^{(j)}}{(j-1)!}\sum_{i=0}^{m} b_i(-i\tau)^{j-1} + O(\tau^k) = \\
&= -\frac{u_n}{\tau}\sum_{i=0}^{m} a_i + \sum_{j=1}^{k}\frac{u_n^{(j)}}{j!}\tau^{j-1}\sum_{i=0}^{m}(-i)^{j-1}(ia_i + jb_i) + O(\tau^k).
\end{aligned}$$

Заметим, что если все суммы подбором коэффициентов a_i, b_j обратить в нуль, то для невязки будет справедлива оценка:

$$\psi_n = O(\tau^k).$$

Таким образом, достаточным условием k-го порядка аппроксимации будет выполнение системы равенств:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{m} a_i = 0; \\ \sum\limits_{i=0}^{m}(-i)^{j-1}(ia_i + jb_i) = 0, \quad j = \overline{1,\, k}. \end{cases} \tag{5.7}$$

Рассмотрим отдельно последнее условие при $j = 1$:

$$\sum_{i=0}^{m} ia_i + \sum_{i=0}^{m} b_i = 0. \tag{5.8}$$

Согласно условию нормировки, $\sum\limits_{i=0}^{m} b_i = 1$, поэтому (5.8) перепишется так:

$$\sum_{i=0}^{m} ia_i = -1 \iff \sum_{i=1}^{m} ia_i = -1.$$

Добавив это уравнение и условие нормировки в систему (5.7), получим окончательный вариант достаточного условия k-го порядка аппроксимации:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{m} b_i = 1; \\ \sum\limits_{i=0}^{m} a_i = 0; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} ia_i = -1; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} i^{j-1}(ia_i + jb_i) = 0, \quad j = \overline{2,\, k}. \end{cases} \tag{5.9}$$

Мы получили систему из $k + 2$ линейных уравнений, решив которую, мы получим параметры, определяющие метод k-го порядка аппроксимации. Система содержит $2m+2$ неизвестных. Чтобы она не была переопределенной, потребуем, чтобы $k + 2 \leqslant 2m + 2$.

Таким образом, порядок аппроксимации m-шагового линейного метода не может превышать $2m$ — для неявного метода. Если же метод явный, то одним неизвестным в системе становится меньше, и максимально возможный порядок аппроксимации будет равен $2m - 1$.

Перейдем к практическим примерам.

Теперь почти очевидно, что мы можем получить все y_j^k ($j = \overline{0,\, N}$, $k = \overline{0,\, K}$). Действительно, фиксируем $n = 0$. Тогда мы получим систему линейных уравнений с трехдиагональной матрицей. Правые части уравнений мы можем найти, используя начальные условия (заметим, что φ_j^n мы задали при исследовании порядка аппроксимации). После этого применяется метод прогонки, после которого становятся известны все y_j^1. Теперь можно увеличить n и снова получить СЛАУ, подставив в правую часть уравнений только что найденные y_j^1. Так действуем, пока не найдем все y_j^k.

Мы рассмотрели схему для нахождения численного решения простейшей краевой задачи. Для нее существует более простое аналитическое решение, но в общем случае его может и не быть. В то же время вся методика построения разностных схем и их решение достаточно легко переносятся на более сложные задачи, к которым мы и перейдем.

5.12 Разностные схемы для уравнения теплопроводности особого типа

Разностная схема для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

Рассмотрим такую краевую задачу:

$$\begin{cases} \rho(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial t} &=& \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T; \\ u(0,t) &=& \mu_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(1,t) &=& \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \\ u(x,0) &=& u^0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Аналитического выражения для решения нет. Тем не менее, известно, что если всюду верны неравенства

$$0 < c_1 \leqslant \rho(x,t);$$
$$0 < c_2 \leqslant k(x,t),$$

то оно существует и единственно.

Теперь будем приближать u_t соответствующей разностной производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx u_{t,j}^n,$$

а производные по x с использованием интегро-интерполяционного метода можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \approx \big(au_{\overline{x}}\big)_{x,j} = \frac{1}{h}\left(a_{j+1}\frac{u_{j+1}-u_j}{h} - a_j\frac{u_j - u_{j-1}}{h}\right),$$

где a_j вычисляются по такой формуле:

$$a_j = \left[\frac{1}{h}\int\limits_{x_{j-1}}^{x_j}\frac{dx}{k(x,t)}\right]^{-1} \approx k(x_{j-\frac{1}{2}}, t).$$

Используя шаблон из шести точек, мы построим разностную схему. Выкладки аналогичны предыдущим схемам, поэтому опустим их и приведем только окончательный результат:

$$\begin{cases} \rho(x_j,t)\dfrac{y_j^{n+1}-y_j^n}{\tau} &=& \sigma\big(ay_{\overline{x}}\big)_{x,j}^{n+1} + (1-\sigma)\big(ay_{\overline{x}}\big)_{x,j}^n + \varphi_j^n; \quad j = \overline{1,\, N-1},\ n = \overline{0,\, K-1} \\ y_j^0 &=& u^0(x_j), \quad j = \overline{0,\, N}; \\ y_0^n &=& \mu_1(t_n), \quad n = \overline{1,\, K}; \\ y_N^n &=& \mu_2(t_n), \quad n = \overline{1,\, K}. \end{cases} \tag{5.38}$$

Здесь остаются нефиксированными момент времени t в первом уравнении (от него зависят a_j и ρ) и параметр метода σ. Взяв $\sigma = \dfrac{1}{2}$ и $t = t_{n+\frac{1}{2}}$, мы можем получить такую оценку на порядок аппроксимации:

$$\psi_j^{n+\frac{1}{2}} = O(\tau^2 + h^2).$$

В противном случае оценка будет похуже:

$$\psi_j^n = O(\tau + h^2).$$

Наконец, общая формула для получения y будет такова:

$$A_j y_{j+1}^{n+1} - C_j y_j^{n+1} + B_j y_{j-1}^{n+1} = -F_j.$$

При этом правая часть уравнения зависит только от y_n. Это означает, что, решая данное уравнение послойно (с $n = 0$) и используя начальные условия, мы можем найти все y_j^k. Все эти умозаключения абсолютно идентичны тем, что были в конце предыдущего параграфа.

Разностная схема для нелинейного уравнения теплопроводности

Исследуем случай, когда уравнение теплопроводности в краевой задаче имеет такой вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u,x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u,x,t).$$

— это означает, что коэффициенты при производных зависят еще и от искомой функции u, причем, вообще говоря, нелинейно.

В этом случае рекомендуется использовать неявные разностные схемы, так как они чаще всего абсолютно устойчивы. Приведем пример:

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \left(a y_{\overline{x}}\right)_{x,j}^{n+1} + f(y_j^{n+1}),$$

при этом коэффициенты a зависят еще и от y. Расписав разностные производные, получим такую формулу:

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \frac{1}{h}\left[a_{j+1}(y_j^{n+1}) \cdot \frac{y_{j+1}^{n+1} - y_j^{n+1}}{h} - a_j(y_j^{n+1}) \cdot \frac{y_j^{n+1} - y_{j-1}^{n+1}}{h}\right] + f(y_j^{n+1}).$$

— для каждого слоя это система нелинейных уравнений относительно y_j^{n+1}. Решается она итерационным методом следующего вида. Если обозначить за $\overset{(k)}{y_j}$ приближение для y_j^{n+1}, то формула для получения следующего приближения будет такова:

$$\frac{\overset{(k+1)}{y_j} - y_j^n}{\tau} = \frac{1}{h}\left[a_{j+1}(\overset{(k)}{y_j}) \cdot \frac{\overset{(k+1)}{y_{j+1}} - \overset{(k+1)}{y_j}}{h} - a_j(\overset{(k)}{y_j}) \cdot \frac{\overset{(k+1)}{y_j} - \overset{(k+1)}{y_{j-1}}}{h}\right] + f(\overset{(k)}{y_j})$$

— это уже система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей. Она, в свою очередь, решается методом прогонки, и мы получаем $(k+1)$-е приближение к y_j^{n+1}. Обычно ограничиваются пятью приближениями:

$$y_j^{n+1} = \overset{(5)}{y_j}.$$